PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA

UJIAN PROFESI AKTUARIS

MATA UJIAN : A70 – Pemodelan dan Teori Risiko
TANGGAL : 21 November 2017
JAM : 13.30 – 16.30

LAMA UJIAN : 180 Menit
SIFAT UJIAN : Tutup Buku

2017

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

TATA TERTIB UJIAN

1. Setiap Kandidat harus berada di ruang ujian selambat-lambatnya 15 (lima belas) menit sebelum ujian dimulai.
2. Kandidat yang datang 1 (satu) jam setelah berlangsungnya ujian dilarang memasuki ruang ujian dan mengikuti ujian.
3. Kandidat dilarang meninggalkan ruang ujian selama 1 (satu) jam pertama berlangsungnya ujian.
4. Setiap kandidat harus menempati bangku yang telah ditentukan oleh Komisi Penguji.
5. Buku-buku, diktat, dan segala jenis catatan harus diletakkan di tempat yang sudah ditentukan oleh Pengawas, kecuali alat tulis yang diperlukan untuk mengerjakan ujian dan kalkulator.
6. Setiap kandidat hanya berhak memperoleh satu set bahan ujian. Kerusakan lembar jawaban oleh kandidat, tidak akan diganti. Dalam memberikan jawaban, lembar jawaban harus dijaga agar tidak kotor karena coretan. Lembar jawaban pilihan ganda tidak boleh diberi komentar selain pilihan jawaban yang benar.
7. Kandidat dilarang berbicara dengan/atau melihat pekerjaan kandidat lain atau berkomunikasi langsung ataupun tidak langsung dengan kandidat lainnya selama ujian berlangsung.
8. Kandidat dilarang menanyakan makna pertanyaan kepada Pengawas ujian.
9. Kandidat yang terpaksa harus meninggalkan ruang ujian untuk keperluan mendesak (misalnya ke toilet) harus meminta izin kepada Pengawas ujian dan setiap kali izin keluar diberikan hanya untuk 1 (satu) orang. Setiap peserta yang keluar tanpa izin dari pengawas maka lembar jawaban akan diambil oleh pengawas dan dianggap telah selesai mengerjakan ujian.
10. Alat komunikasi harus dimatikan selama ujian berlangsung.
11. Pengawas akan mencatat semua jenis pelanggaran atas tata tertib ujian yang akan menjadi pertimbangan diskualifikasi. **Komisi Ujian dan Kurikulum mempunyai hak untuk melarang Kandidat yang didiskualifikasi untuk mengikuti ujian di periode berikutnya.**
12. Kandidat yang telah selesai mengerjakan soal ujian, harus menyerahkan lembar jawaban langsung kepada Pengawas ujian dan tidak meninggalkan lembar jawaban tersebut di meja ujian.
13. Kandidat yang telah menyerahkan lembar jawaban harus meninggalkan ruang ujian.
14. Kandidat dapat mengajukan keberatan terhadap soal ujian yang dinilai tidak benar dengan penjelasan yang memadai kepada komisi penguji selambat-lambatnya 10 (sepuluh) hari setelah akhir periode ujian.

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

PETUNJUK MENGERJAKAN SOAL

Ujian Pilihan Ganda

1. Setiap soal akan mempunyai 4 (empat) atau 5 (lima) pilihan jawaban di mana hanya 1 (satu) jawaban yang benar.
2. Setiap soal mempunyai bobot nilai yang sama dengan tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.
3. Saudara diminta untuk membaca dan mengikuti petunjuk pengisian yang ada di lembar jawaban.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor peserta, kode dan tanggal ujian pada** tempat yang disediakan dan **tanda tangani lembar jawaban tersebut tanpa menuliskan nama Saudara.**

Ujian Soal Esay

1. Setiap soal dapat mempunyai lebih dari 1 (satu) pertanyaan, Setiap soal mempunyai bobot yang sama kecuali terdapat keterangan pada soal.
2. Tuliskan jawaban Saudara pada Buku Jawaban Soal dengan jelas, rapi dan terstruktur sehingga akan mempermudah pemeriksaan hasil ujian.
3. Saudara bisa mulai dengan soal yang anda anggap mudah dan tuliskan nomor jawaban soal dengan soal dengan jelas.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor ujian Saudara** pada tempat yang disediakan dan **tanda tangani Buku Ujian tanpa menuliskan nama Saudara**.

KETENTUAN DAN PROSEDUR KEBERATAN SOAL UJIAN PAI

1. **Peserta dapat memberikan sanggahan soal, jawaban atau keluhan kepada Komisi Ujian dan Kurikulum selambat-lambatnya 10 hari setelah akhir periode ujian.**
2. Semua pengajuan keberatan soal dialamatkan ke **sanggahan.soal@aktuaris.or.id.**
3. Pengajuan keberatan soal setelah tanggal tersebut (Poin No 1) tidak akan diterima dan ditanggapi.

1. Sebuah manfaat perawatan gigi dirancang dengan *deductible* sebesar 100 untuk klaim perawatan gigi tahunan. Penggantian pembayaran (*reimbursement*) ke tertanggung adalah sebesar 80% dari klaim perawatan gigi setelah *deductible* dan maksimum penggantian pembayaran tahunan adalah 1.000. Diberikan data sebagai berikut:
   i. Klaim perawatan gigi tahunan untuk setiap tertanggung berdistribusi exponensial dengan rata – rata 1.000.
   ii. Gunakan bilangan acak uniform (0,1) berikut dan gunakan metode inversi untuk menghasilkan empat nilai klaim perawatan gigi tahunan.
      0,30   0,92   0,70   0,08

   Hitunglah rata-rata penggantian pembayaran tahunan untuk simulasi ini.

   A. 522
   B. 696
   C. 757
   D. 947
   E. 1.042

2. Diberikan data pengalaman polis asuransi kendaraan sebagai berikut

	Perusahaan	**Tahun 1**	**Tahun 2**	**Tahun 3**
Kerugian	A	50.000	50.000	?
Jumlah kendaraan		100	200	?
Kerugian	B	?	150.000	150.000
Jumlah kendaraan		?	500	300
Kerugian	C	150.000	?	150.000
Jumlah kendaraan		50	?	150

   Hitunglah *the nonparametric empirical Bayes credibility factor ,Z,* untuk perusahaan C.

   A. kurang dari 0,2
   B. paling sedikit 0,2 akan tetapi kurang dari 0,4
   C. paling sedikit 0,4 akan tetapi kurang dari 0,6
   D. paling sedikit 0,6 akan tetapi kurang dari 0,8
   E. paling sedikit 0,8

Gunakan informasi berikut untuk soal nomor 3 dan 4.
Waktu hingga terjadi sebuah kecelakaan (*the time to an accident*) mengikuti distribusi eksponensial. Rata-rata waktu hingga terjadi sebuah kecelakaan dari sebuah sampel acak berukuran dua adalah 6. Misalkan Y adalah rata-rata dari sampel baru berukuran dua.

3. Hitunglah taksiran maksimum likelihood dari $Pr(Y > 10)$
   A. 0,04
   B. 0,07
   C. 0,11
   D. 0,15
   E. 0,19

4. Gunakan metode delta untuk melakukan approksimasi terhadap variansi dari taksiran maksimum likelihood dari $F_Y(10)$.
   A. 0,08
   B. 0,12
   C. 0,16
   D. 0,19
   E. 0,22

5. Diberikan data berikut:
   - Kerugian mengikuti sebuah distribusi Weibull dengan parameter $\theta = 20$ dan $\tau = 1$.
   - Pertanggungan asuransi memiliki *deductible* sebesar 10.

   Jika diketahui bahwa perusahaan asuransi melakukan sebuah pembayaran, tentukan probabilitas pembayaran yang dilakukan sebesar kurang dari atau sama dengan 25.
   A. kurang dari 0,65
   B. paling sedikit 0,65 akan tetapi kurang dari 0,70
   C. paling sedikit 0,70 akan tetapi kurang dari 0,75
   D. paling sedikit 0,75 akan tetapi kurang dari 0,80
   E. paling sedikit 0,80

Gunakan informasi berikut untuk soal nomor 6 dan 7.
Diberikan data berikut:

- Kerugian mengikuti sebuah distribusi lognormal dengan parameter $\mu = 7$ dan $\sigma = 2$.
- Terdapat *deductible* sebesar 2.000.
- Sebanyak 10 kerugian diharapkan terjadi pada setiap tahun.
- Banyaknya klaim kerugian dan besarnya kerugian individu adalah saling bebas (*independent*)

6. Hitunglah *Loss Elimination Ratio* terhadap penggunaan *deductible* tersebut.
   A. kurang dari 0,10
   B. paling sedikit 0,10 akan tetapi kurang dari 0,15
   C. paling sedikit 0,15 akan tetapi kurang dari 0,20
   D. paling sedikit 0,20 akan tetapi kurang dari 0,25
   E. paling sedikit 0,25

7. Tentukan ekspektasi banyaknya klaim kerugian tahunan yang melebihi nilai deductible jika setiap kerugian nilainya mengalami kenaikan secara uniform sebesar 20%, namun deductible tidak mengalami perubahan.
   A. kurang dari 4
   B. paling sedikit 4 akan tetapi kurang dari 5
   C. paling sedikit 5 akan tetapi kurang dari 6
   D. paling sedikit 6 akan tetapi kurang dari 7
   E. paling sedikit 7

8. Diberikan waktu kematian sebagai berikut pada sebuah studi mortalitas terhadap sekelompok orang yang berusia 65 tahun.

   10 17 22 25 25

   Sebuah distribusi dari waktu hingga kematian (*time to death*) dikonstruksikan menggunakan metode kepadatan kernel. Sebuah kernel seragam digunakan dengan *bandwith* 10. Hitunglah probabilitas kematian sebelum waktu 20 dengan menggunakan distribusi yang dihasilkan.
   A. 0,47
   B. 0,49
   C. 0,50
   D. 0,51
   E. 0,53

9. Pada sebuah pertanggungan asuransi, besarnya klaim mengikuti sebuah distribusi Pareto dengan parameter $\alpha = 4$ dan θ. Sedangkan θ bervariasi pada setiap tertanggung dan mengikuti sebuah distribusi normal dengan $\mu = 3$ dan $\sigma = 1$.
   Hitunglah kredibilitas Buhlmann yang diberikan pada sebuah klaim tunggal (*a single claim*).
   A. 0,05
   B. 0,07
   C. 0,10
   D. 0,14
   E. 0,18

10. Pada sebuah pertanggungan asuransi, hanya satu klaim per tahun yang dapat diajukan. Anda diberikan data pengalaman berikut atas pertanggungan asuransi ini.

Tahun	Jumlah Tertanggung	Jumlah Klaim
2005	200	8
2006	250	15
2007	150	15
2008	200	18

   Anda mengestimasi probabilitas dari sebuah klaim dalam satu tahun menggunakan maksimum likelihood dan uji kecocokan dengan menggunakan uji *Chi-Square*.
   Hitunglah nilai statistik chi-square.
   A. 6,00
   B. 6,15
   C. 6,30
   D. 6,45
   E. 6,60

11. Pada sebuah studi mortalitas,y_1 adalah waktu pertama kali terjadinya kematian. Selang kepercayaan linear 95% dari $S(y_1)$, dengan menggunakan taksiran Kaplan-Meier dan aproksimasi Greenwood dari variansi adalah (0,8241 , 0,9759).
   Hitunglah banyaknya kematian yang terjadi pada saat y_1.
   A. 2
   B. 3
   C. 4
   D. 5
   E. 6

12. Sebuah peubah acak diskrit X berdistribusi binomial dengan parameter $m = 2$ dan q. Tentukan rentang (*range*) dari q sedemikian sehingga percentile ke-70 dari X bernilai 1.
    A. $[0{,}10\ ,\ 0{,}45]$
    B. $[0{,}16\ ,\ 0{,}55]$
    C. $[0{,}28\ ,\ 0{,}66]$
    D. $[0{,}34\ ,\ 0{,}72]$
    E. $[0{,}45\ ,\ 0{,}84]$

13. Pada sebuah studi mortalitas, diberikan sampel dari waktu bertahan hidup (*survival times*) sebagai berikut
    125, 132, 135, 135, 147, 147, 160, 160
    Distribusi dari *survival times* diestimasi dengan menggunakan dua metode:
    I. Menggunakan distribusi empiris
    II. Menggunakan taksiran *Nelson-Aalen*

    Hitunglah selisih absolut dari rata-rata survival time sampai 160, $E[X \wedge 160]$, antara dua metode ini.
    A. 0,75
    B. 1,00
    C. 1,25
    D. 1,50
    E. 1,75

14. Diberikan pengalaman dari tiga kelompok pemegang polis sebagai berikut:

Kelompok		Tahun 1	Tahun 2
A	Jumlah Polis	10	15
	Rata-rata kerugian	5	10
B	Jumlah Polis	-	30
	Rata-rata kerugian	-	12
C	Jumlah Polis	-	20
	Rata-rata kerugian	-	5

    Hitunglah faktor kredibilitas Z untuk pemegang polis C dengan menggunakan metode *empirical Bayes non-parametric*.
    A. kurang dari 0,47
    B. paling sedikit 0,47 akan tetapi kurang dari 0,49
    C. paling sedikit 0,49 akan tetapi kurang dari 0,51
    D. paling sedikit 0,51 akan tetapi kurang dari 0,53
    E. paling sedikit 0,53

15. Banyaknya klaim pertahun dari seorang tertanggung mengikuti sebuah distribusi Poisson dengan rata-rata λ.
    λ bervariasi berdasarkan sebuah distribusi gamma dengan $\alpha = 20$ dan $\theta = 0{,}01$.
    Berikut adalah informasi mengenai banyaknya klaim pertahun yang terjadi pada seorang tertanggung selama enam tahun terakhir.
    0, 0, 1, 0, 0, 1
    Hitunglah *the posterior variance* dari banyaknya klaim pertahun untuk tertanggung ini pada tahun depan.
    A. kurang dari 0,18
    B. paling sedikit 0,18 akan tetapi kurang dari 0,19
    C. paling sedikit 0,19 akan tetapi kurang dari 0,20
    D. paling sedikit 0,20 akan tetapi kurang dari 0,21
    E. paling sedikit 0,21

16. Banyaknya klaim pada sebuah pertanggungan asuransi mengikuti sebuah distribusi Poisson. Diberikan pengalaman selama satu tahun dari 137 polis sebagai berikut:

Jumlah Klaim	Jumlah Polis
0	70
1	35
2	20
3	8
4	4
5+	0

    Dengan menggunakan metode *empirical Bayes semi-parametric*, hitunglah prediksi banyaknya klaim yang terjadi tahun depan untuk sesorang yang memiliki tiga klaim.
    A. 1,4
    B. 1,7
    C. 2,1
    D. 2,4
    E. 2,7

17. Sebuah kerugian mengikuti distribusi Pareto dengan satu parameter dengan parameter $\alpha = 1$ dan $\theta = 1.000$. Hitunglah simpangan baku dari rata-rata pembayaran perkerugian pada sebuah pertanggungan dengan batas polis (*policy limit*) sebesar 10.000.
    A. kurang dari 2.500
    B. paling sedikit 2.500 akan tetapi kurang dari 2.600
    C. paling sedikit 2.600 akan tetapi kurang dari 2.700
    D. paling sedikit 2.700 akan tetapi kurang dari 2.800
    E. paling sedikit 2.800

18. Diberikan informasi sebagai berikut:
    i. Kerugian pada sebuah pertanggungan asuransi mengikuti sebuah distribusi lognormal dengan parameter $\mu = \Theta$ dan $\sigma = 2$.
    ii. Θ bervariasi antar pemegang polis sesuai dengan distribusi normal dengan rata-rata 5 dan variansi 3.
    iii. Seorang pemegang polis melakukan klaim kerugian sebanyak 20 kali. Rata-rata klaim sebesar 10.000.

    Tentukan prediksi *Buhlmann* terhadap besarnya klaim untuk klaim berikutnya dari pemegang polis tersebut.
    A. 6.200
    B. 7.100
    C. 7.500
    D. 7.900
    E. 8.700

19. Untuk sebuah pertanggungan asuransi,besarnya klaim berdistribusi Pareto dengan parameter $\alpha = 4$ dan Θ. Parameter Θ bervariasi untuk setiap tertanggung dan mengikuti distibusi gamma sebagai berikut

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{\Gamma(10)2^{10}}\theta^9 e^{-\theta/2}$$

    Hitunglah kledibilitas Buhlmann yang diberikan kepada satu observasi.
    A. kurang dari 0,040
    B. paling sedikit 0,040 akan tetapi kurang dari 0,042
    C. paling sedikit 0,042 akan tetapi kurang dari 0,044
    D. paling sedikit 0,044 akan tetapi kurang dari 0,046
    E. paling sedikit 0,046

20. Untuk sebuah kelompok manfaat perawatan gigi:
    - Total kerugian (*aggregate losses*) pada setiap tertanggung memiliki rata-rata 400 dan variansi 200.000.
    - Banyaknya klaim pada setiap tertanggung mengikuti sebuah distribusi binomial negatif dengan $r = 2$ dan $\beta = 1$.

    Anda menggunakan metode kredibilitas fluktuasi terbatas untuk mengevaluasi pengalaman kredibilitas dari kelompok ini. Kredibilitas standard adalah total kerugian harus berada dalam 5% dari ekspektasi dengan probabilitas sebesar 99%.

    Tentukan banyaknya ekspektasi klaim yang dibutuhkan (*the number of expected claims needed*) untuk kredibilitas 25%.

A. 207
B. 415
C. 539
D. 829
E. 1.659

21. Untuk sebuah pertanggungan asuransi, kerugian mengikuti sebuah distribusi eksponensial dengan median 500. Pertanggungan ini memiliki a *franchise deductible* sebesar 250. Hitunglah rata-rata pembayaran untuk setiap klaim yang dibayarkan.
A. 500
B. 597
C. 721
D. 750
E. 971

22. Sebanyak dua belas pemegang polis diamati dari saat polis asuransi berlaku sampai waktu pertama kali melakukan klaim asuransi. Data yang diamati adalah sebagai berikut:

Waktu pertama kali melakukan klaim	1	2	3	4	5	6	7
Jumlah klaim	2	1	2	2	1	2	2

Dengan menggunakan taksiran Nelson-Aalen hitunglah selang kepercayaan linear 95% untuk fungsi *cumulative hazard rate* $H(4{,}5)$.
A. $(0{,}189\,,1{,}361)$
B. $(0{,}206\,,1{,}545)$
C. $(0{,}248\,,1{,}402)$
D. $(0{,}283\,,1{,}266)$
E. $(0{,}314\,,1{,}437)$

23. Sebuah *cohort* dari pasien penyakit kritis diamati dari waktu $t = 0$ sampai semua meninggal pada $t = 5$. Diberikan informasi sebagai berikut:
i.

Waktu t	Meniggal pada saat t
1	6
2	9
3	5
4	d_4
5	d_5

ii. $\widehat{Var}\big(S_n(1)\big) = \widehat{Var}\big(S_n(3)\big)$ berdasarkan data aktual.
iii. Rata-rata sisa masa hidup untuk pasien yang bertahan sampai $t = 3$ adalah $^7/_6$.
Hitunglah banyaknya kematian yang terjadi saat $t = 4$.

A. 1
B. 3
C. 5
D. 10
E. 15

24. Diberikan data sebagai berikut

Besaran klaim (X)	Jumlah Klaim
$(0,25]$	25
$(25,50]$	28
$(50,100]$	15
$(100,200]$	6

Diasumsikan besarnya klaim berdistribusi seragam pada setiap interval.
Hitunglah $E[X^2] - E[(X \wedge 150)^2]$

A. kurang dari 200
B. paling sedikit 200 akan tetapi kurang dari 300
C. paling sedikit 300 akan tetapi kurang dari 400
D. paling sedikit 400 akan tetapi kurang dari 500
E. paling sedikit 500

25. Diberikan informasi sebagai berikut
   i. Sebuah sampel pembayaran klaim : 29 64 90 135 182
   ii. Besarnya klaim diasumsikan berdistribusi eksponensial
   iii. Rata-rata dari distribusi eksponensial diestimasi dengan menggunakan metode moment

Hitunglah nilai statistik uji Kolmogorov-Smirnov.

A. 0,14
B. 0,16
C. 0,19
D. 0,25
E. 0,27

26. Diberikan informasi sebagai berikut:
    - Kerugian mengikuti sebuah distribusi Pareto dengan parameter θ (tidak diketahui) dan $\alpha = 3$.
    - Sebanyak 300 kerugian telah diamati.

    Tentukan variansi dari $\tilde{\theta}$, taksiran θ dengan menggunakan metode moment.

    A. $0{,}0025\theta^2$
    B. $0{,}0033\theta^2$
    C. $0{,}0050\theta^2$
    D. $0{,}0100\theta^2$
    E. $0{,}0133\theta^2$

27. Anda telah mencocokkan (*fitted*) sebuah sampel klaim berukuran 30 ke distribusi berikut dengan menggunakan maksimum likelihood.

Distribusi	Jumlah Parameter	Negatif likelihood
Eksponensial	1	123,2
Inverse Gaussian	2	121,4
Generalized Pareto	3	120,4
Transformed Beta	4	x

    Dengan menggunakan kriteria *Schwarz Bayesian*, tentukan batas atas terkecil dari nilai x sedemikian sehingga terpilih distribusi dengan 4 parameter.

    A. 118,0
    B. 118,1
    C. 118,4
    D. 118,5
    E. 118,7

28. Rata-rata pembayaran pada setiap kerugian untuk sebuah pertanggungan asuransi dengan *deductible* 100 diestimasi dengan menggunakan tiga observasi berikut:

    200 400 600

    Hasil estimasi adalah 300.
    Hitunglah approksimasi bootstrap dari *mean square error* untuk estimasi ini.

    A. 20.000/3
    B. 80.000/9
    C. 40.000/3
    D. 20.000
    E. 80.000/3

29. X mengikuti sebuah distribusi inverse eksponensial dengan $\theta = 50$.
Simulasikan X menggunakan angka acak seragam $[0,1)$ berikut ini dan metode inversi.

0,4 0,6 0,9

Hitunglah nilai simulasi dari $E[X \wedge 100]$.

A. 57
B. 62
C. 67
D. 76
E. 84

30. Sebuah kelumpok beranggotakan 100 individu. Setiap individu pada kelompok ini memiliki tingkat kematian $q_x = 0{,}01$. Kematian antar individu adalah saling bebas (*independent*).
Anda akan melakukan simulasi pengalaman mortalitas selama tiga tahun untuk kelompok ini dengan menggunakan metode inversi. Gunakan tiga angka berikut dari distribusi seragam $[0,1)$: 0,12 0,35 0,68

Hitunglah jumlah kematian yang disimulasikan selama tiga tahun.

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

*****

NORMAL DISTRIBUTION TABLE

Entries represent the area under the standardized normal distribution from -∞ to z, Pr(Z<z)
The value of z to the first decimal is given in the left column. The second decimal place is given in the top row.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Values of z for selected values of Pr(Z<z)							
z	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
Pr(Z<z)	0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995

A.2.3.1 Pareto (Pareto Type II, Lomax)—α, θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} \qquad F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -1 < k < \alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k k!}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta[(1-p)^{-1/\alpha} - 1] \\
\mathrm{TVaR}_p(X) &= \mathrm{VaR}_p(X) + \frac{\theta(1-p)^{-1/\alpha}}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1 \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= \frac{\theta}{\alpha-1}\left[1 - \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha-1}\right], \quad \alpha \neq 1 \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= -\theta \ln\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right), \quad \alpha = 1 \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}\beta[k+1, \alpha-k; x/(x+\theta)] + x^k\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha, \quad \text{all } k \\
\text{mode} &= 0
\end{aligned}
$$

A.3.2.1 Gamma—α, θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x/\theta)^\alpha e^{-x/\theta}}{x\Gamma(\alpha)} \qquad F(x) = \Gamma(\alpha; x/\theta) \\
M(t) &= (1-\theta t)^{-\alpha}, \quad t < 1/\theta \qquad \mathrm{E}[X^k] = \frac{\theta^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k > -\alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k(\alpha+k-1)\cdots\alpha, \quad \text{if } k \text{ is an integer}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+k; x/\theta) + x^k[1 - \Gamma(\alpha; x/\theta)], \quad k > -\alpha \\
&= \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\theta^k\Gamma(\alpha+k; x/\theta) + x^k[1 - \Gamma(\alpha; x/\theta)], \quad k \text{ an integer} \\
\text{mode} &= \theta(\alpha-1), \quad \alpha > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.5.1.1 Lognormal—μ, σ (μ can be negative)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2/2) = \phi(z)/(\sigma x), \quad z = \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \qquad F(x) = \Phi(z) \\
\mathrm{E}[X^k] &= \exp(k\mu + k^2\sigma^2/2) \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \exp(k\mu + k^2\sigma^2/2)\Phi\left(\frac{\ln x - \mu - k\sigma^2}{\sigma}\right) + x^k[1 - F(x)] \\
\text{mode} &= \exp(\mu - \sigma^2)
\end{aligned}
$$

A.3.3.1 Exponential—θ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{-x/\theta}}{\theta} \qquad F(x) = 1 - e^{-x/\theta} \\
M(t) &= (1-\theta t)^{-1} \qquad \mathrm{E}[X^k] = \theta^k \Gamma(k+1), \quad k > -1 \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k k!, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p) \\
\mathrm{TVaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p) + \theta \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= \theta(1 - e^{-x/\theta}) \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(k+1) \Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k > -1 \\
&= \theta^k k! \Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k \text{ an integer} \\
\text{mode} &= 0
\end{aligned}$$

A.3.3.2 Inverse exponential—θ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\theta e^{-\theta/x}}{x^2} \qquad F(x) = e^{-\theta/x} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k \Gamma(1-k), \quad k < 1 \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta(-\ln p)^{-1} \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k G(1-k; \theta/x) + x^k (1 - e^{-\theta/x}), \quad \text{all } k \\
\text{mode} &= \theta/2
\end{aligned}$$

A.3.2.3 Weibull—θ, τ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau (x/\theta)^\tau e^{-(x/\theta)^\tau}}{x} \qquad F(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^\tau} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k \Gamma(1 + k/\tau), \quad k > -\tau \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta[-\ln(1-p)]^{1/\tau} \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(1+k/\tau) \Gamma[1 + k/\tau; (x/\theta)^\tau] + x^k e^{-(x/\theta)^\tau}, \quad k > -\tau \\
\text{mode} &= \theta \left(\frac{\tau - 1}{\tau} \right)^{1/\tau}, \quad \tau > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}$$

B.2.1.1 Poisson—λ

$$\begin{aligned}
p_0 &= e^{-\lambda}, \quad a = 0, \quad b = \lambda \qquad p_k = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\
\mathrm{E}[N] &= \lambda, \quad \mathrm{Var}[N] = \lambda \qquad P(z) = e^{\lambda(z-1)}
\end{aligned}$$

B.2.1.2 Geometric—β

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{1+\beta}, \quad a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = 0 \qquad p_k = \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}} \\ \mathrm{E}[N] &= \beta, \quad \mathrm{Var}[N] = \beta(1+\beta) \qquad P(z) = [1-\beta(z-1)]^{-1}. \end{aligned}$$

This is a special case of the negative binomial with $r = 1$.

B.2.1.3 Binomial—q, m, ($0 < q < 1$, m an integer)

$$\begin{aligned} p_0 &= (1-q)^m, \quad a = -\frac{q}{1-q}, \quad b = \frac{(m+1)q}{1-q} \\ p_k &= \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, m \\ \mathrm{E}[N] &= mq, \quad \mathrm{Var}[N] = mq(1-q) \qquad P(z) = [1+q(z-1)]^m. \end{aligned}$$

B.2.1.4 Negative binomial—β, r

$$\begin{aligned} p_0 &= (1+\beta)^{-r}, \quad a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = \frac{(r-1)\beta}{1+\beta} \\ p_k &= \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)\beta^k}{k!(1+\beta)^{r+k}} \\ \mathrm{E}[N] &= r\beta, \quad \mathrm{Var}[N] = r\beta(1+\beta) \qquad P(z) = [1-\beta(z-1)]^{-r}. \end{aligned}$$

*****