PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA

UJIAN PROFESI AKTUARIS

MATA UJIAN : A70 – Pemodelan & Teori Risiko
TANGGAL : 21 Juni 2016
JAM : 12.30 – 15.30

LAMA UJIAN : 180 Menit
SIFAT UJIAN : Tutup Buku

2016

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

TATA TERTIB UJIAN

1. Setiap Kandidat harus berada di ruang ujian selambat-lambatnya 15 (lima belas) menit sebelum ujian dimulai.
2. Kandidat yang datang 1 (satu) jam setelah berlangsungnya ujian dilarang memasuki ruang ujian dan mengikuti ujian.
3. Kandidat dilarang meninggalkan ruang ujian selama 1 (satu) jam pertama berlangsungnya ujian.
4. Setiap kandidat harus menempati bangku yang telah ditentukan oleh Komisi Penguji.
5. Buku-buku, diktat, dan segala jenis catatan harus diletakkan di tempat yang sudah ditentukan oleh Pengawas, kecuali alat tulis yang diperlukan untuk mengerjakan ujian dan kalkulator.
6. Setiap kandidat hanya berhak memperoleh satu set bahan ujian. Kerusakan lembar jawaban oleh kandidat, tidak akan diganti. Dalam memberikan jawaban, lembar jawaban harus dijaga agar tidak kotor karena coretan. Lembar jawaban pilihan ganda tidak boleh diberi komentar selain pilihan jawaban yang benar.
7. Kandidat dilarang berbicara dengan/atau melihat pekerjaan kandidat lain atau berkomunikasi langsung ataupun tidak langsung dengan kandidat lainnya selama ujian berlangsung.
8. Kandidat dilarang menanyakan makna pertanyaan kepada Pengawas ujian.
9. Kandidat yang terpaksa harus meninggalkan ruang ujian untuk keperluan mendesak (misalnya ke toilet) harus meminta izin kepada Pengawas ujian dan setiap kali izin keluar diberikan hanya untuk 1 (satu) orang. Setiap peserta yang keluar tanpa izin dari pengawas maka lembar jawaban akan diambil oleh pengawas dan dianggap telah selesai mengerjakan ujian.
10. Alat komunikasi harus dimatikan selama ujian berlangsung.
11. Pengawas akan mencatat semua jenis pelanggaran atas tata tertib ujian yang akan menjadi pertimbangan diskualifikasi.
12. Kandidat yang telah selesai mengerjakan soal ujian, harus menyerahkan lembar jawaban langsung kepada Pengawas ujian dan tidak meninggalkan lembar jawaban tersebut di meja ujian.
13. Kandidat yang telah menyerahkan lembar jawaban harus meninggalkan ruang ujian.
14. Kandidat dapat mengajukan keberatan terhadap soal ujian yang dinilai tidak benar dengan penjelasan yang memadai kepada komisi penguji selambat-lambatnya 10 (sepuluh) hari setelah akhir periode ujian.

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

PETUNJUK MENGERJAKAN SOAL

Ujian Pilihan Ganda

1. Setiap soal akan mempunyai 4 (empat) atau 5 (lima) pilihan jawaban di mana hanya 1 (satu) jawaban yang benar.
2. Setiap soal mempunyai bobot nilai yang sama dengan tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.
3. Berilah tanda silang pada jawaban yang Saudara anggap benar di lembar jawaban. Jika Saudara telah menentukan jawaban dan kemudian ingin merubahnya dengan yang lain, maka coretlah jawaban yang salah dan silang jawaban yang benar.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor ujian Saudara pada** tempat yang sediakan dan **tanda tangani lembar jawaban tersebut tanpa menuliskan nama Saudara.**

Ujian Soal Esay

1. Setiap soal dapat mempunyai lebih dari 1 (satu) pertanyaan, Setiap soal mempunyai bobot yang sama kecuali terdapat keterangan pada soal.
2. Tuliskan jawaban Saudara pada Buku Jawaban Soal dengan jelas, rapi dan terstruktur sehingga akan mempermudah pemeriksaan hasil ujian.
3. Saudara bisa mulai dengan soal yang anda anggap mudah dan tuliskan nomor jawaban soal dengan soal dengan jelas.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor ujian Saudara** pada tempat yang disediakan dan **tanda tangani Buku Ujian tanpa menuliskan nama Saudara**.

KETENTUAN DAN PROSEDUR KEBERATAN SOAL UJIAN PAI

1. **Peserta dapat memberikan sanggahan soal, jawaban atau keluhan kepada Komisi Ujian dan Kurikulum selambat-lambatnya 10 hari setelah akhir periode ujian.**
2. Semua pengajuan keberatan soal dialamatkan ke **sanggahan.soal@aktuaris.or.id**
3. Pengajuan keberatan soal setelah tanggal tersebut (Poin No 1) tidak akan diterima dan ditanggapi.

1. Untuk sebuah asuransi kendaraan bermotor diketahui bahwa besaran klaim berdistribusi pareto dengan dua parameter θ = 10.000 dan α. Median dari besaran klaim ini adalah 5.000.

   Hitunglah probabilitas sebuah klaim bernilai lebih besar dari 25.000.

   A. 0,1175
   B. 0,3125
   C. 0,5000
   D. 0,6875
   E. 0,8825

2. Diketahui peubah acak dari sebuah kerugian ,X, memiliki karakteristik berikut:

$\boldsymbol{X}$	$\boldsymbol{F(x)}$	$\boldsymbol{E(X \wedge x)}$
0	0,0	0
100	0,2	91
200	0,6	153
1.000	1,0	331

   Hitunglah *mean excess loss* untuk sebuah *deductible* sebesar 100.

   A. 250
   B. 300
   C. 350
   D. 400
   E. 450

3. Besaran sebuah kerugian memiliki *cumulative distribution function* sebagai berikut:

$$\mathrm{F(x)} = \frac{3}{4}\left(\frac{x}{100}\right)^{1/4} + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{100}\right)^{1/2} \quad ; \qquad 0 \le x \le 100$$

   Hitunglah *Loss Elimination Ratio* untuk sebuah *ordinary deductible* sebesar 20. Pilih pembulatan terdekat.

   A. 0,14
   B. 0,20
   C. 0,36
   D. 0,42
   E. 0,45

4. Sebuah Perusahaan memiliki 50 karyawan yang memiliki biaya perawatan gigi yang saling bebas secara mutual (*mutually independent*). Untuk setiap karyawan, Perusahaan akan membayarkan 100% biaya perawatan gigi setelah dikurangi $100.
   Biaya perawatan gigi untuk setiap karyawan berdistibusi sebagai berikut:

Biaya Perawatan Gigi	Probabilitas
0	20%
50	30%
200	30%
500	10%
1.000	10%

   Dengan menggunakan pendekatan distribusi normal, hitunglah percentile ke-95 untuk biaya perawatan gigi yang dibayarkan oleh Perusahaan.
   (Pilihlah jawaban yang paling mendekati)
   A. $ 8.173
   B. $ 9.173
   C. $ 10.173
   D. $ 11.173
   E. $ 12.173

5. Diberikan informasi sebagai berikut:
   - Kerugian berdistribusi Pareto dengan parameter $\theta = k$ dan $\alpha = 2$
   - Terdapat *deductible* sebesar $2k$

   Hitunglah *Loss Elimination Ratio*!.
   A. 1/3
   B. 1/2
   C. 2/3
   D. 4/5
   E. 1

6. Kerugian berdistribusi eksponensial dengan rata-rata (*mean*) 1.000. Terdapat *deductible* sebesar 500. Sebuah Perusahaan ingin menggandakan *Loss Elimination Ratio* (LER). Tentukan nilai *deductible* yang baru sedemikian sehingga tujuan perusahaan untuk menggandakan LER tercapai.
   A. 219
   B. 693
   C. 1.046
   D. 1.193
   E. 1.546

7. Diberikan informasi sebagai berikut untuk klaim aggregat $\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{N} X_i$
   - X_i berdistribusi sbb

x	$\Pr(X = x)$
1	p
2	$1 - p$

   - Λ adalah peubah acak Poisson dengan parameter $\frac{1}{p}$;
   - Diketahui $\Lambda = \lambda$, N berdistribusi Poisson dengan parameter λ
   - Banyaknya klaim dan besar klaim saling bebas secara mutual (*mutually independent*)
   - $\mathrm{Var(S)} = \frac{19}{2}$

   Hitunglah p.

   A. 1/6
   B. 1/5
   C. 1/4
   D. 1/3
   E. 1/2

8. Sebuah perusahaan asuransi menjual 300 polis asuransi kebakaran dengan informasi sebagai berikut:

Jumlah Polis	*policy maximum*	Probabilitas terjadinya klaim per polis
100	400	0,05
200	300	0,06

   Diberikan informasi sebagai berikut
   - Besar klaim untuk setiap polis berdistribusi seragam (*uniformly distributed*) antara 0 dan *policy maximum*.
   - Probabilitas terjadinya klaim lebih dari satu per polis adalah 0.
   - Kejadian munculnya klaim saling bebas (*independent*)

   Hitunglah variansi dari klaim aggregat! (Pilihlah jawaban yang paling mendekati).

   A. 150.000
   B. 300.000
   C. 450.000
   D. 600.000
   E. 750.000

9. Diberikan informasi sebagai berikut:
    - Banyaknya klaim berdistribusi binomial negatif dengan $r = 0.5$ dan $\beta = 1$ per tahun.
    - Besar klaim berdistribusi Pareto yang memiliki dua parameter yaitu $\alpha = 3$ dan $\theta = 1.000$
    - Banyaknya klaim dan besar klaim saling bebas (*independent*).

   Dengan menggunakan *normal approximation*, hitunglah probabilitas total klaim tahunan (*annual aggregate claims*) bernilai kurang dari 150.

   A. 0,15
   B. 0,25
   C. 0,35
   D. 0,45
   E. 0,55

10. Sebanyak 16 orang telah diamati untuk keperluan studi perhitungan tingkat mortalitas. Tidak ada peserta yang mengundurkan diri (*no withdrawal*) dari pengamatan sebelum 12 satuan waktu. *The product limit estimator* dari $S(12)$ adalah 0,9375.

    Hitunglah *Nelson Aalen estimate* untuk $S(12)$.

    A. 0,9337
    B. 0,9356
    C. 0,9375
    D. 0,9394
    E. 0,9413

11. Dalam sebuah *studi* perhitungan tingkat mortalitas diberikan beberapa observasi berikut
    i. Pada waktu t = 1 ; sejumlah x orang meninggal, 1 keluar (*withdrawals*) dan 1 masuk (*enters*).
    ii. Pada waktu t = 2; sejumlah y orang meninggal dan 1 masuk (*enters*).
    iii. Pada waktu t = 3; 1 orang meninggal.

    Berdasarkan observasi diatas, tiga nilai dari $\widehat{H}(t)$, estimator Nelson Aalen untuk fungsi kumulatif hazard pada saat t adalah:

    $\widehat{H}(1,5) = 0,20$
    $\widehat{H}(2,5) = 0,45$
    $\widehat{H}(3,5) = 0,55$

    Hitunglah $x + y$.

    A. 3
    B. 4
    C. 5
    D. 6
    E. 7

12. Dalam sebuah studi 5 tahunan untuk perhitungan tingkat mortalitas diberikan data berikut:

y_j	s_j	r_j
1	3	15
2	24	80
3	5	25
4	6	60
5	3	10

Hitunglah *Greenwood's approximation* untuk *conditional variance* dari *product limit estimator* $S(4)$.

A. 0,0055
B. 0,0056
C. 0,0058
D. 0,0061
E. 0,0063

13. Dari sebuah populasi yang memiliki fungsi distribusi *F,* diberikan sampel berikut:

2,0 3,3 3,3 4,0 4,0 4,7 4,7 4,7

Hitunglah *kernel density estimate* dari $F(4)$, dengan menggunakan kernel seragam (*uniform kernel*) dengan *bandwidth* 1,4.

A. 0,31
B. 0,41
C. 0,50
D. 0,53
E. 0,63

14. Sebuah selang kepercayaan linear 90% dari $H(100)$ adalah (0,82 ; 0,98)
Hitunglah batas atas dari selang kepercayaan *log-transformed* 98% dari $H(100)$.

A. 0,98
B. 0,99
C. 1,00
D. 1,01
E. 1,02

15. Diberikan informasi sebagai berikut

- Kerugian berdistribusi Pareto dengan parameter θ(tidak diketahui) dan $\alpha = 3$.
- Sebanyak 300 kerugian telah diamati.

Hitunglah variansi dari $\bar{\theta}$, taksiran dari θ dengan menggunakan metode moment.

A. $0{,}0025\theta^2$
B. $0{,}0033\theta^2$
C. $0{,}0050\theta^2$
D. $0{,}0100\theta^2$
E. $0{,}0133\theta^2$

16. Diberikan sampel acak dari 13 klaim sebagai berikut:

    99 133 175 216 250 277 651 698 735 745 791 906 947

    Tentukan *the smoothed empirical estimate* dari percentile ke-35 (*35th percentile*).

    A. 219,4
    B. 231,3
    C. 234,7
    D. 246,6
    E. 256,8

17. Diberikan 3(tiga) observasi sebagai berikut

    0,74 0,81 0,95

    Anda akan mencocokkan data observasi tersebut dengan distribusi yang memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

    $$f(x) = (p+1)x^p \qquad ; \qquad 0 < x < 1, p > -1$$

    Tentukan *the maximum likelihood estimate* dari p.

    A. 4,0
    B. 4,1
    C. 4,2
    D. 4,3
    E. 4,4

18. Diberikan informasi sebagai berikut

    I. Sebuah sampel pembayaran klaim : 29 64 90 135 182
    II. Besar klaim diasumsikan berdistribusi eksponensial.
    III. Rata-rata dari distribusi eksponensial diestimasi dengan menggunakan metode moment.

    Hitunglah nilai dari statistik uji Kolmogorov Smirnov.

    A. 0,14
    B. 0,16
    C. 0,19
    D. 0,25
    E. 0,27

19. Banyaknya klaim dari sebuah pertanggungan asuransi adalah sebagai berikut:

Banyaknya klaim (*number of claims*)	Jumlah Polis (*number of policies*)
0	325
1	325
2	225
3	100
4	25
5+	0

Sebuah distibusi *Poisson* dengan rata-rata (*mean*) 1,2 disesuaikan (*fitted*) dengan data. Hitunglah nilai dari statistik *Chi-Square.*

A. kurang dari 9
B. paling sedikit 9, akan tetapi kurang dari 11
C. paling sedikit 11, akan tetapi kurang dari 13
D. paling sedikit 13, akan tetapi kurang dari 15
E. lebih dari 15

20. Hasil observasi 4, 8 , 18 , 21 , 49 disesuaikan (*fitted*) dengan distribusi yang memiliki fungsi kepadatan peluang (*density function*) sebagai berikut menggunakan *matching* moment pertama dan moment kedua.

$$f(x;\theta,d) = \frac{1}{\theta}e^{-(x-d)/\theta} \qquad ; \qquad x \geq d$$

Tentukan *median* dari *fitted distribution*.

A. 11
B. 13
C. 14
D. 15
E. 16

21. Dalam sebuah studi mortalitas, kematian terjadi pada waktu berikut:

    60, 70, 75, 80, 86, 87, 88

    Fungsi survival berikut disesuaikan (*fitted*) dengan data menggunakan *percentile matching.*

    $$S(x) = \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{\theta} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 100$$

    Percentile ke-60 dari "*the fitted distribution*" disesuaikan (*is matched*) dengan Percentile ke-60 dari metode "*empirical smoothed*".

    Tentukan probabilitas seseorang bertahan hidup (*the fitted probability of survival)* melebihi usia 80.

    A. 0,43
    B. 0,44
    C. 0,46
    D. 0,48
    E. 0,49

22. Diberikan informasi sebagai berikut

    I. Banyaknya klaim berdistribusi binomial negative dengan parameter r dan $\beta = 3$

    II. Besar klaim berdistribusi sebagai berikut:

Besar Klaim	Probabilitas
1	40%
10	40%
100	20%

    III. Banyaknya klaim dan besar klaim diketahui saling bebas (*independent*)

    Tentukan ekspektasi jumlah klaim (*expected number of claims*) yang dibutuhkan sehingga total kerugian (*aggregate loss*) berada dalam 10% dari ekspektasi total kerugian (*expected aggregate losses*) dengan probabilitas 95%.

    A. kurang dari 1.200
    B. paling sedikit 1.200, akan tetapi kurang dari 1.600
    C. paling sedikit 1.600, akan tetapi kurang dari 2.000
    D. paling sedikit 2.000, akan tetapi kurang dari 2.400
    E. lebih dari 2.400

23. Diberikan informasi sebagai berikut
    - X adalah peubah acak untuk besar klaim.
    - N adalah peubah acak untuk banyaknya klaim dan diketahui berdistribusi *Poisson*.
    - X dan N saling bebas (*independent*).
    - n_0 adalah standar untuk kredibilitas penuh (*full credibility*) berdasarkan banyaknya klaim.
    - n_f adalah standar untuk kredibilitas penuh (*full credibility*) berdasarkan total biaya klaim.
    - n adalah banyaknya klaim yang diamati.
    - C adalah peubah acak untuk total biaya klaim.
    - Z adalah besar kredibilitas (*amount of credibility*) pada total biaya klaim.

    Berdasarkan metode kredibilitas fluktuasi terbatas (limited fluctuation credibility),manakah pernyataan berikut yang **<u>benar</u>**?

    1. $Var(C) = \big(E(N).Var(X)\big) + (E(X).Var(N))$
    2. $\mathrm{n}_f = \mathrm{n}_0\left(\frac{E(X)^2+Var(X)}{E(X)^2}\right)$
    3. $Z = \sqrt{\frac{n}{\mathrm{n}_f}}$

    A. 1 saja
    B. 2 saja
    C. 1 dan 2
    D. 2 dan 3
    E. 1,2 dan 3

24. Diberikan informasi sebagai berikut:
    - Sebuah portfolio terdiri dari 100 resiko yang identik dan saling bebas (*identic and independent risks*).
    - Banyaknya klaim per tahun untuk setiap resiko berdistribusi *Poisson* dengan *mean* λ.
    - *The prior distribution* dari λ diasumsikan berdistribusi gamma dengan *mean* 0,25 dan variansi 0,0025.
    - Pada tahun terakhir, terdapat pengalaman kerugian sebagai berikut :

Banyaknya Klaim	Jumlah risiko
0	80
1	17
2	3

    Tentukan variansi dari *the posterior distribution* dari λ.

A. kurang dari 0,00075
B. paling sedikit 0,00075, akan tetapi kurang dari 0,00125
C. paling sedikit 0,00125, akan tetapi kurang dari 0,00175
D. paling sedikit 0,00175, akan tetapi kurang dari 0,00225
E. lebih dari 0,00225

25. Diberikan informasi sebagai berikut:
- Banyaknya klaim berdistribusi gamma dengan parameter α dan $\theta = 0{,}5$.
- *The prior distribution* dari α diasumsikan berdistribusi seragam (*uniform*) pada interval (0,4).

Tentukan nilai *Buhlmann's k* untuk mengestimasi nilai ekspektasi dari sebuah klaim.
A. 2/3
B. 1
C. 4/3
D. 3/2
E. 2

26. Diberikan informasi tentang total klaim untuk 2(dua) orang pemegang polis sbb:

	Tahun			
Pemegang Polis	1	2	3	4
X	730	800	650	700
Y	655	650	625	750

Dengan menggunakan *the nonparametric empirical Bayes method,* tentukan premi kredibilitas Buhlmann untuk pemegang polis Y.
(Petunjuk : penyelesaian bisa menggunakan asumsi "*uniform exposure*")
A. 655
B. 670
C. 687
D. 703
E. 719

27. Banyaknya kejadian klaim dari seorang pengemudi selama setahun diasumsikan berdistribusi *Poisson* dengan rata-rata (*mean*) tidak diketahui dan bervariasi antar sesama pengemudi. Pengalaman dari 100 pengemudi adalah sebagai berikut:

Banyaknya klaim yang terjadi selama satu tahun	Jumlah pengemudi
0	54
1	33
2	10
3	2
4	1

Tentukan kredibilitas pengalaman selama satu tahun dari seorang pengemudi dengan menggunakan estimasi *semiparametric empirical Bayes*.

A. 0,046
B. 0,055
C. 0,061
D. 0,068
E. 0,073

28. Diberikan informasi sebagai berikut:
- Selama periode 2(dua) tahun, sebanyak 100 polis memiliki pengalaman klaim sbb:

Banyaknya klaim yang terjadi pada tahun pertama dan tahun kedua	Jumlah Polis
0	50
1	30
2	15
3	4
4	1

- Banyaknya klaim per tahun berdistribusi *Poisson.*
- Setiap pemegang polis diasuransikan selama 2(dua) tahun penuh.

Secara random dipilih pemegang polis yang memiliki 1(satu) klaim selama periode 2(dua) tahun. Dengan menggunakan estimasi *semiparametric empirical Bayes,* tentukan estimasi *Buhlmann* untuk banyaknya klaim pada tahun ketiga untuk pemegang polis yang sama.

A. 0,380
B. 0,387
C. 0,393
D. 0,403
E. 0,443

29. Sebuah grup terdiri dari 100 orang. Untuk setiap individu pada grup ini, tingkat mortalitas $q_x = 0{,}01$. Mortalitas untuk setiap individu saling bebas (*independent*).
Anda akan melakukan simulasi pengalaman mortalitas selama 3 tahun untuk grup ini dengan menggunakan metode inversi. Dengan menggunakan 3(tiga) angka berikut dari distribusi seragam (*uniform*) pada [0,1) yaitu 0,12 ; 0,35; 0,68.

Tentukan banyaknya kematian dari hasil simulasi selama tiga tahun.

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

30. X berdistribusi *inverse exponential* dengan $\theta = 50$. Simulasikan X menggunakan *uniform random numbers* berikut pada [0,1) dan metode inversi.

0,4 0,6 0,9

Tentukan nilai simulasi dari $E[X \wedge 100]$

A. 57
B. 62
C. 67
D. 76
E. 84

*****

NORMAL DISTRIBUTION TABLE

Entries represent the area under the standardized normal distribution from -∞ to z, Pr(Z<z)
The value of z to the first decimal is given in the left column. The second decimal place is given in the top row.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Values of z for selected values of Pr(Z<z)							
z	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
Pr(Z<z)	0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995

A.2.3.1 Pareto (Pareto Type II, Lomax)—α,θ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} \qquad F(x) = 1-\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -1<k<\alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k k!}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta[(1-p)^{-1/\alpha}-1] \\
\mathrm{TVaR}_p(X) &= \mathrm{VaR}_p(X) + \frac{\theta(1-p)^{-1/\alpha}}{\alpha-1}, \quad \alpha>1 \\
\mathrm{E}[X\wedge x] &= \frac{\theta}{\alpha-1}\left[1-\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha-1}\right], \quad \alpha\neq 1 \\
\mathrm{E}[X\wedge x] &= -\theta\ln\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right), \quad \alpha=1 \\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}\beta[k+1,\alpha-k;x/(x+\theta)] + x^k\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha, \quad \text{all } k \\
\text{mode} &= 0
\end{aligned}$$

A.3.2.1 Gamma—α,θ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x/\theta)^\alpha e^{-x/\theta}}{x\Gamma(\alpha)} \qquad F(x) = \Gamma(\alpha;x/\theta) \\
M(t) &= (1-\theta t)^{-\alpha}, \quad t<1/\theta \qquad \mathrm{E}[X^k] = \frac{\theta^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k>-\alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k(\alpha+k-1)\cdots\alpha, \quad \text{if } k \text{ is an integer}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+k;x/\theta) + x^k[1-\Gamma(\alpha;x/\theta)], \quad k>-\alpha \\
&= \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\theta^k\Gamma(\alpha+k;x/\theta) + x^k[1-\Gamma(\alpha;x/\theta)], \quad k \text{ an integer} \\
\text{mode} &= \theta(\alpha-1), \quad \alpha>1, \text{ else } 0
\end{aligned}$$

A.5.1.1 Lognormal—μ,σ (μ can be negative)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2/2) = \phi(z)/(\sigma x), \quad z=\frac{\ln x-\mu}{\sigma} \qquad F(x)=\Phi(z) \\
\mathrm{E}[X^k] &= \exp(k\mu+k^2\sigma^2/2) \\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \exp(k\mu+k^2\sigma^2/2)\Phi\left(\frac{\ln x-\mu-k\sigma^2}{\sigma}\right) + x^k[1-F(x)] \\
\text{mode} &= \exp(\mu-\sigma^2)
\end{aligned}$$

A.3.3.1 Exponential—θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{-x/\theta}}{\theta} \qquad F(x) = 1 - e^{-x/\theta} \\
M(t) &= (1-\theta t)^{-1} \qquad \mathrm{E}[X^k] = \theta^k \Gamma(k+1), \quad k > -1 \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k k!, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p) \\
\mathrm{TVaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p) + \theta \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= \theta(1 - e^{-x/\theta}) \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(k+1)\Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k > -1 \\
&= \theta^k k! \Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k \text{ an integer} \\
\text{mode} &= 0
\end{aligned}
$$

A.3.3.2 Inverse exponential—θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\theta e^{-\theta/x}}{x^2} \qquad F(x) = e^{-\theta/x} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k \Gamma(1-k), \quad k < 1 \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta(-\ln p)^{-1} \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k G(1-k; \theta/x) + x^k(1 - e^{-\theta/x}), \quad \text{all } k \\
\text{mode} &= \theta/2
\end{aligned}
$$

B.2.1.1 Poisson—λ

$$
\begin{aligned}
p_0 &= e^{-\lambda}, \quad a = 0, \quad b = \lambda \qquad p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
\mathrm{E}[N] &= \lambda, \quad \mathrm{Var}[N] = \lambda \qquad P(z) = e^{\lambda(z-1)}
\end{aligned}
$$

B.2.1.2 Geometric—β

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \frac{1}{1+\beta}, \quad a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = 0 \qquad\qquad p_k = \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}} \\
\mathrm{E}[N] &= \beta, \quad \mathrm{Var}[N] = \beta(1+\beta) \qquad\qquad P(z) = [1-\beta(z-1)]^{-1}.
\end{aligned}
$$

This is a special case of the negative binomial with $r = 1$.

B.2.1.3 Binomial—q, m, ($0 < q < 1$, m an integer)

$$
\begin{aligned}
p_0 &= (1-q)^m, \quad a = -\frac{q}{1-q}, \quad b = \frac{(m+1)q}{1-q} \\
p_k &= \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, m \\
\mathrm{E}[N] &= mq, \quad \mathrm{Var}[N] = mq(1-q) \qquad\qquad P(z) = [1+q(z-1)]^m.
\end{aligned}
$$

B.2.1.4 Negative binomial—β, r

$$
\begin{aligned}
p_0 &= (1+\beta)^{-r}, \quad a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = \frac{(r-1)\beta}{1+\beta} \\
p_k &= \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)\beta^k}{k!(1+\beta)^{r+k}} \\
\mathrm{E}[N] &= r\beta, \quad \mathrm{Var}[N] = r\beta(1+\beta) \qquad\qquad P(z) = [1-\beta(z-1)]^{-r}.
\end{aligned}
$$

*****