PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA

UJIAN PROFESI AKTUARIS

MATA UJIAN	: A20 – Probabilitas dan Statistika
TANGGAL	: 21 Juni 2016
JAM	: 08.30 – 11.30 WIB
LAMA UJIAN	: 180 Menit
SIFAT UJIAN	: Tutup Buku

2016

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

TATA TERTIB UJIAN

1. Setiap Kandidat harus berada di ruang ujian selambat-lambatnya 15 (lima belas) menit sebelum ujian dimulai.
2. Kandidat yang datang 1 (satu) jam setelah berlangsungnya ujian dilarang memasuki ruang ujian dan mengikuti ujian.
3. Kandidat dilarang meninggalkan ruang ujian selama 1 (satu) jam pertama berlangsungnya ujian.
4. Setiap kandidat harus menempati bangku yang telah ditentukan oleh Komisi Penguji.
5. Buku-buku, diktat, dan segala jenis catatan harus diletakkan di tempat yang sudah ditentukan oleh Pengawas, kecuali alat tulis yang diperlukan untuk mengerjakan ujian dan kalkulator.
6. Setiap kandidat hanya berhak memperoleh satu set bahan ujian. Kerusakan lembar jawaban oleh kandidat, tidak akan diganti. Dalam memberikan jawaban, lembar jawaban harus dijaga agar tidak kotor karena coretan. Lembar jawaban pilihan ganda tidak boleh diberi komentar selain pilihan jawaban yang benar.
7. Kandidat dilarang berbicara dengan/atau melihat pekerjaan kandidat lain atau berkomunikasi langsung ataupun tidak langsung dengan kandidat lainnya selama ujian berlangsung.
8. Kandidat dilarang menanyakan makna pertanyaan kepada Pengawas ujian.
9. Kandidat yang terpaksa harus meninggalkan ruang ujian untuk keperluan mendesak (misalnya ke toilet) harus meminta izin kepada Pengawas ujian dan setiap kali izin keluar diberikan hanya untuk 1 (satu) orang. Setiap peserta yang keluar tanpa izin dari pengawas maka lembar jawaban akan diambil oleh pengawas dan dianggap telah selesai mengerjakan ujian.
10. Alat komunikasi harus dimatikan selama ujian berlangsung.
11. Pengawas akan mencatat semua jenis pelanggaran atas tata tertib ujian yang akan menjadi pertimbangan diskualifikasi.
12. Kandidat yang telah selesai mengerjakan soal ujian, harus menyerahkan lembar jawaban langsung kepada Pengawas ujian dan tidak meninggalkan lembar jawaban tersebut di meja ujian.
13. Kandidat yang telah menyerahkan lembar jawaban harus meninggalkan ruang ujian.
14. Kandidat dapat mengajukan keberatan terhadap soal ujian yang dinilai tidak benar dengan penjelasan yang memadai kepada komisi penguji selambat-lambatnya 10 (sepuluh) hari setelah akhir periode ujian.

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

PETUNJUK MENGERJAKAN SOAL

Ujian Pilihan Ganda

1. Setiap soal akan mempunyai 4 (empat) atau 5 (lima) pilihan jawaban di mana hanya 1 (satu) jawaban yang benar.
2. Setiap soal mempunyai bobot nilai yang sama dengan tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.
3. Berilah tanda silang pada jawaban yang Saudara anggap benar di lembar jawaban. Jika Saudara telah menentukan jawaban dan kemudian ingin merubahnya dengan yang lain, maka coretlah jawaban yang salah dan silang jawaban yang benar.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor ujian Saudara pada** tempat yang sediakan dan **tanda tangani lembar jawaban tersebut tanpa menuliskan nama Saudara.**

Ujian Soal Esay

1. Setiap soal dapat mempunyai lebih dari 1 (satu) pertanyaan, Setiap soal mempunyai bobot yang sama kecuali terdapat keterangan pada soal.
2. Tuliskan jawaban Saudara pada Buku Jawaban Soal dengan jelas, rapi dan terstruktur sehingga akan mempermudah pemeriksaan hasil ujian.
3. Saudara bisa mulai dengan soal yang anda anggap mudah dan tuliskan nomor jawaban soal dengan soal dengan jelas.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor ujian Saudara** pada tempat yang disediakan dan **tanda tangani Buku Ujian tanpa menuliskan nama Saudara**.

KETENTUAN DAN PROSEDUR KEBERATAN SOAL UJIAN PAI

1. **Peserta dapat memberikan sanggahan soal, jawaban atau keluhan kepada Komisi Ujian dan Kurikulum selambat-lambatnya 10 hari setelah akhir periode ujian.**
2. Semua pengajuan keberatan soal dialamatkan ke **sanggahan.soal@aktuaris.or.id.**
3. Pengajuan keberatan soal setelah tanggal tersebut (Poin No 1) tidak akan diterima dan ditanggapi.

1. Diketahui bahwa $P(A \cup B) = 0,7$ dan $P(A \cup B') = 0,9$. Hitung $P(A)$!
   a. 0,2
   b. 0,3
   c. 0,4
   d. 0,6
   e. 0,8

2. Sebuah kotak menyimpan 4 bola merah dan 6 bola putih. Sebuah sampel acak mengambil 3 bola dari kotak tersebut tanpa mengganti bola yang sudah diambil. Berapa peluang bahwa terdapat 1 bola merah dan 2 bola putih, diberikan sedikitnya terdapat 2 bola berwarna putih di sampel acak tersebut?
   a. 1/2
   b. 2/3
   c. 3/4
   d. 9/11
   e. 54/55

3. Sebuah studi selama periode satu tahun dilakukan untuk menginvestigasi kondisi kesehatan dari dua grup yang saling bebas yang mana dalam tiap grup terdapat 10 pemegang polis. Peluang bahwa partisipan individual dalam suatu grup mengundurkan diri sebelum berakhirnya studi ialah sebesar 0,2 (saling bebas terhadap peserta lainnya). Berapa peluang bahwa terdapat sedikitnya 9 partisipan yang berhasil menyelesaikan studi ini di salah satu grup, tetapi tidak di kedua grup?
   a. 0,096
   b. 0,192
   c. 0,235
   d. 0,376
   e. 0,469

4. Seorang aktuaris menemukan statistik bahwa para pemegang polis mengajukan dua klaim adalah tiga kali lebih banyak dari pengajuan 4 klaim. Jika banyaknya klaim mempunyai distribusi Poisson, berapa variansi dari banyaknya klaim yang diajukan?
   a. $1/\sqrt{3}$
   b. 1
   c. $\sqrt{2}$
   d. 2
   e. 4

5. Misalkan peubah acak kontinu X mempunyai fungsi kepadatan peluang :
$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{\{a-1\}}(1-x)^{\{b-1\}},\ 0 < x < 1, \text{dan } a > 0 \ \& \ b > 0$$
   Jika $b = 6$ dan $a = 5$. Tentukan ekspektasi dari $(1 - X)^{-4}$!
   a. 42
   b. 63
   c. 210
   d. 252
   e. 315

6. Lama waktu untuk sebuah komponen elektronik rusak mempunyai distribusi eksponensial dengan median waktu 4 jam. Berapa peluang bahwa sebuah komponen akan bekerja dan tidak rusak untuk setidaknya 5 jam?
   a. 0,07
   b. 0,29
   c. 0,38
   d. 0,42
   e. 0,57

7. Misalkan X dan Y ialah peubah acak saling bebas dengan

$$\mu_X = 1,\ \mu_Y = -1.\ \sigma_X^2 = \frac{1}{2},\ \sigma_Y^2 = 2.$$

Hitung $E[(X+1)^2(Y-1)^2]$.

a. 1

b. 9/2

c. 16

d. 17

e. 27

8. Salah satu pertanyaan yang sering diajukan oleh perusahaan asuransi ketika penerimaan aplikasi polisi asuransi jiwa ialah apakah pemegang polis adalah seorang perokok atau tidak. Perusahaan asuransi mengetahui apabila proporsi perokok di populasi umum ialah 0,3 dan asumsikan bahwa nilai ini juga merepresentasikan proporsi perokok pada calon pemegang polis di perusahaan tersebut. Misalkan perusahaan asuransi ini mendapatkan informasi mengenai tingkat kejujuran dari pengajuan aplikasi sebagai berikut :

- 40% dari calon pemegang polis yang ternyata perokok mengatakan bahwa mereka bukan perokok pada saat pengajuan aplikasi
- Tidak ada calon pemegang polis yang bukan perokok berbohong pada saat pengajuan aplikasi mereka

Berapa proporsi aplikasi yang mengatakan bahwa mereka bukan perokok yang ternyata memang bukan perokok?

a. 0

b. 6/41

c. 12/41

d. 35/41

e. 1

9. Seorang perusahaan asuransi memprediksi bahwa waktu hidup Joko berdistribusi uniform dengan interval $[0,5]$ dan waktu hidup Amir berdistribusi uniform dengan interval $[0,10]$. Perusahaan asuransi mengasumsikan bahwa waktu hidup antara satu individu dengan individu yang lain ialah peubah acak yang saling bebas. Berapa peluang bahwa Joko meninggal terlebih dahulu daripada Amir?
   a. 1/4
   b. 1/3
   c. 1/2
   d. 2/3
   e. 3/4

10. Sebuah mesin memiliki dua komponen. Mesin tersebut terus beroperasi selama setidaknya satu dari dua komponen tersebut masih bekerja. Sebuah pengamatan ketika mesin baru mulai bekerja mengindikasikan bahwa waktu lamanya komponen 1 sebelum rusak ialah X dan komponen 2 ialah Y (asumsikan distribusi kontinu dalam satuan tahunan). Fungsi kepadatan peluang gabungan antara $X\ dan\ Y$ ialah :

$$f(x, y) = x + y, \qquad 0 < x < 1\,, 0 < y < 1$$

    Berapa peluang bahwa sebuah mesin baru masih bekerja hingga 6 bulan setelah mesin tersebut mulai beroperasi?
    a. 31/32
    b. 15/16
    c. 7/8
    d. 3/4
    e. 1/2

11. Misalkan waktu harapan hidup satu pasangan suami istri adalah saling bebas dan berdistribusi uniform pada interval $[0, 40]$. Sebuah perusahaan asuransi menawarkan dua produksi asuransi pada pasangan sudah menikah yaitu sbb:
    - Produk 1 : Pembayaran benefit ketika suami dari pasangan tersebut meninggal dunia
    - Produk 2: Pembayaran benefit ketika baik suami dan istri dari pasangan tersebut meninggal dunia

    Berapa kovariansi dari waktu pembayaran dari dua produk diatas?

    a. 0
    b. 44,4
    c. 66,7
    d. 200,0
    e. 466,7

12. Peubah acak X mempunyai distribusi eksponensial dengan rataan $1/b$. Diketahui bahwa $M_X(-b^2) = 0{,}2$. Tentukan b.
    a. 1
    b. 2
    c. 3
    d. 4
    e. 5

13. Misalkan Y adalah peubak acak kontinu dengan fungsi distribusi kumulatif :

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } y \leq a \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}(y-a)^2}, & y > a \end{cases}$$

dimana a adalah sebuah konstanta. Berapa nilai persentil ke -75 dari Y?
    a. $F(0.75)$
    b. $a - \sqrt{2ln2}$
    c. $a + \sqrt{2ln2}$
    d. $a - 2\sqrt{ln2}$
    e. $a + 2\sqrt{ln2}$

14. Peluang kepadatan gabungan dari tiga peubah acak diskrit X, Y, Z adalah sebagai berikut :

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{1}{24}(xy + xz^2), \qquad \text{untuk } x = 1,2, y = 1,2 \text{ , } z = 0,1$$

Berapa banyak pernyataan dibawah ini yang menurut anda benar?

- X dan Y saling bebas
- X dan Z saling bebas
- Y dan Z saling bebas

a. 0
b. 1
c. 2
d. 3
e. Informasi pada soal kurang lengkap

15. Sebuah pesawat kecil memiliki 30 tempat duduk. Peluang bahwa seorang penumpang tidak datang pada suatu penerbangan adalah 0,1, yang mana diketahui saling bebas. Perusahaan menerapkan kebijakan untuk menjual 32 tiket. Berapa peluang bahwa akan datang lebih banyak penumpang daripada kursi penerbangan yang tersedia?

a. 0,0042
b. 0,0343
c. 0,0382
d. 0,1221
e. 0,1564

16. Berapa banyak pernyataan terkait dengan penjumlahan peubah acak yang saling bebas dbawah ini yang benar ?
    (1) Penjumlahan peubah acak Poisson yang saling bebas mempunyai distribusi Poisson
    (2) Penjumlahan peubah acak eksponensial yang saling bebas mempunyai distribusi eksponensial
    (3) Penjumlahan peubah acak chi-square yang saling bebas mempunyai distribusi chi square
    (4) Penjumlahan peubah acak normal yang saling bebas mempunyai distribusi normal

    a. 0
    b. 1
    c. 2
    d. 3
    e. 4

17. Misalkan X_1, X_2 mempunyai fungsi kepadatan peluang gabungan $h(x_1, x_2) = 8x_1x_2, 0 < x_1 < x_2 < 1$, dan $h(x_1, x_2) = 0$ untuk x_1, x_2 lainnya. Cari peluang gabungan antara Y_1, Y_2 dimana $Y_1 = X_1/X_2$ dan $Y_2 = X_2$. Petunjuk : Gunakan pertidaksamaan $0 < y_1y_2 < y_2 < 1$ dalam memetakan S (bidang dimana $\boldsymbol{x}$ terdefinisi) ke T (bidang dimana $\boldsymbol{y}$ terdefinisi) dengan Jacobian Matrix !

    a. $8y_1y_2^3$
    b. $8y_1^3y_2^3$
    c. $8y_1^2y_2^3$
    d. $8y_1y_2^2$
    e. $8y_1y_2^4$

18. Misalkan $f(x_1, x_2) = 21x_1^2x_2^3, 0 < x_1 < x_2 < 1,$ dan 0 untuk lainnya, adalah fungsi kepadatan peluang gabungan antara X_1 dan X_2. Berapa rataaan dari X_1 kondisional diberikan $X_2 = x_2, 0 < x_2 < 1$?
    a. $21/32$
    b. $11/32$
    c. $3/8$
    d. $23/35$
    e. $1/7$

19. Sebuah asuransi kesehatan dasar mempunyai benefit rawat inap sebesar 100 ribu rupiah per hari sampai dengan 3 hari rawat inap dan 25 ribu rupiah per hari setelahnya. Banyaknya hari rawat inap, X, merupakan peubah acak diskrit dengan fungsi massa peluang :
$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{15}(6 - k), k = 1,2,3,4,5 \\ 0, \quad \text{lainnya} \end{cases}$$
    Berapa ekspektasi pembayaran benefit rawat inap untuk polis asuransi ini (ribu rupiah)?
    a. 85
    b. 163
    c. 168
    d. 213
    e. 255

20. Seorang aktuaris menentukan besar klaim untuk suatu jenis kecelakaan diri ialah suatu peubah acak X dengan fungsi pembangkit peluang :
$$M_X(t) = 1/(1 - 2500t)^4$$
    Berapa simpangan baku untuk peubah acak X?
    a. 1.000
    b. 5.000
    c. 2.000
    d. 8.660
    e. 11.000

21. Dalam memodelkan peubah acak banyak klaim dari suatu polis kecelakaan mobil selama periode tiga tahun, seorang aktuaris membuat asumsi sederhana bahwa untuk semua bilangan bulat $n \geq 0$, $p_{n+1} = \left(\frac{1}{5}\right) p_n$, p_n ialah peluang bahwa seorang pemegang polis mengajukan klaim sebanyak n kali. Dengan menggunakan asumsi yang sama, berapa peluang bahwa seorang pemegang polis mengajukan lebih dari 1 kali klaim selama periode yang sama?
   a. $0{,}04$
   b. $0{,}16$
   c. $0{,}20$
   d. $0{,}80$
   e. $0{,}96$

22. Sebagai bagian dari proses underwriting, setiap calon pemegang polis akan menjalani tes tekanan darah tinggi. Misalkan X merepresentasikan banyaknya jumlah test yang dilakukan sampai dengan ditemukannya orang pertama yang menderita tekanan darah tinggi. Diketahui nilai ekspektasi dari X ialah 12,5. Berapa peluang bahwa orang keenam yang dites ialah orang pertama yang menderita tekanan darah tinggi?
   a. $0{,}001$
   b. $0{,}053$
   c. $0{,}080$
   d. $0{,}316$
   e. $0{,}394$

23. Banyaknya jumlah klaim per bulan dimodelkan melalui peubah acak N dengan :

$$P(N = n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)_{\_}}, n \geq 0$$

   Berapa peluang bahwa peluang setidaknya satu klaim terjadi pada suatu bulan, jika diketahui bahwa paling banyak terjadi 4 klaim pada bulan yang sama?

   a. $1/3$
   b. $2/5$
   c. $1/2$
   d. $5/6$
   e. $3/5$

24. Sebuah perusahaan asuransi kendaraan bermotor terkemuka di Jakarta mengestimasi bahwa :
    - Pada satu tahun kalender, paling banyak akan terjadi satu kali banjir di Jakarta
    - Pada satu tahun kalender, peluang terjadinya banjir ialah 0,05
    - Banyaknya banjir di Jakarta pada suatu tahun diasumsikan saling bebas terhadap tahun kalender lainnya

    Berdasarkan asumsi tersebut, berapa peluang terjadi banjir di Jakarta kurang dari tiga kali selama periode 20 tahunan?

    a. 0,06
    b. 0,19
    c. 0,38
    d. 0,62
    e. 0,92

25. Suatu peubah acak besar klaim kendaraan bermotor mempunyai informasi sebagai berikut :

Besar Klaim	20	30	40	50	60	70	80
Peluang	0,15	0,10	0,05	0,20	0,1	0,1	0,3

Berapa persentase bahwa klaim yang terjadi akan berada dalam 1 simpangan baku dari rataan besar klaim?

a. 45%
b. 55%
c. 68%
d. 85%
e. 92%

26. Suatu perusahan asuransi menyediakan cadangan klaim untuk klaim-klaim katastropik sebesar 120 milyar rupiah yang mana, sebesar C akan dibayarkan untuk 20 klaim katastropik pada tahun depan. Setiap klaim besar tersebut mempunyai peluang sebesar 2% untuk terealisasi, yang mana saling bebas antara satu dengan yang lainnya. Tentukan nilai maksimum dari C (milyar) untuk mana akan terdapat kurang dari 1% kemungkinan bahwa cadangan klaim katastropik akan tidak cukup untuk membayarkan semua klaim katastropik!
    a. 24
    b. 30
    c. 40
    d. 60
    e. 120

27. Misalkan X adalah umur suatu kendaraan mobil yang diasuransikan yang terlibat pada suatu kecelakaan. Misalkan Y menyatakan lamanya waktu pemilik kendaraan telah mengasuransikan mobilnya sampai waktu terjadinya kejadian kecelakaan. X dan Y diketahui mempunyai fungsi kepadatan peluang gabungan :

    $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{64}(10 - xy^2), & 2 \leq x \leq 10,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & selain\ diatas \end{cases}$$

    Hitung rata-rata umur kendaraan dari suatu mobil yang diasuransikan mengalami suatu kecelakaan!
    a. 4,9
    b. 5,2
    c. 5,8
    d. 6,0
    e. 6,4

28. Misalkan X_1, X_2, X_3 ialah peubah acak yang identik dan saling bebas yang mana memiliki fungsi kepadatan peluang $f(x) = \exp(-x), 0 < x < \infty$ dan $f(x) = 0$, untuk x lainnya. Hitung $P(X_1 < X_2 | X_1 < 2X_2)$
    a. $1/6$
    b. $4/7$
    c. $2/3$
    d. $1/5$
    e. $3/8$

29. Misalkan $Y_1 < Y_2$ ialah statistik terurut dari suatu sampel acak berukuran 2 dari distribusi $N(0, \sigma^2)$. Hitung $E(Y_1)$
    a. $\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$
    b. $\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$
    c. $-\frac{3\sigma}{\sqrt{\pi}}$
    d. $-\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$
    e. $-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$

30. Misalkan X adalah suatu distribusi Poission dengan parameter m. Jika m ialah suatu nilai eksperimen dari suatu peubah acak yang berdistribusi $Gamma(\alpha = 2, \beta = 1)$, Hitung $P(X = 0,1,2)$! Catatan: Cari suatu ekspresi yang menyatakan peluang gabungan dari X dan m. Kemudian cari bentuk integral dari m untuk menghitung distribusi marginal dari X
    a. $11/16$
    b. $7/16$
    c. $2/9$
    d. $2/7$
    e. $13/16$

DISCRETE DISTRIBUTION

B.2.1.1 Poisson—λ

$$\begin{aligned}
p_0 &= e^{-\lambda}, \quad a=0, \quad b=\lambda,\\
p_k &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\\
\mathrm{E}[N] &= \lambda, \quad \mathrm{Var}[N]=\lambda,\\
\hat{\lambda} &= \hat{\mu},\\
P(z) &= e^{\lambda(z-1)}.
\end{aligned}$$

B.2.1.3 Binomial—q, m $\quad (0<q<1, m \text{ an integer})$

$$\begin{aligned}
p_0 &= (1-q)^m, \quad a=-\frac{q}{1-q}, \quad b=\frac{(m+1)q}{1-q},\\
p_k &= \binom{m}{k} q^k(1-q)^{m-k}, \quad k=0,1,\ldots,m,\\
\mathrm{E}[N] &= mq, \quad \mathrm{Var}[N]=mq(1-q),\\
\hat{q} &= \hat{\mu}/m,\\
P(z) &= [1+q(z-1)]^m.
\end{aligned}$$

B.2.1.4 Negative binomial—β, r

$$\begin{aligned}
p_0 &= (1+\beta)^{-r}, \quad a=\frac{\beta}{1+\beta}, \quad b=\frac{(r-1)\beta}{1+\beta},\\
p_k &= \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)\beta^k}{k!(1+\beta)^{r+k}},\\
\mathrm{E}[N] &= r\beta, \quad \mathrm{Var}[N]=r\beta(1+\beta),\\
\hat{\beta} &= \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\mu}}-1, \quad \hat{r}=\frac{\hat{\mu}^2}{\hat{\sigma}^2-\hat{\mu}},\\
P(z) &= [1-\beta(z-1)]^{-r}, \quad -(1+1/\beta)<z<1+1/\beta.
\end{aligned}$$

CONTINUOUS DISTRIBUTION

A.2.3.1 Pareto—α, θ (Pareto Type II, Lomax)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}, \\
F(x) &= 1-\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha, \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta[(1-p)^{-1/\alpha}-1], \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -1<k<\alpha, \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k k!}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)} \quad \text{if } k \text{ is a positive integer}, \\
\mathrm{E}[X\wedge x] &= \frac{\theta}{\alpha-1}\left[1-\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha-1}\right], \quad \alpha\neq 1, \\
\mathrm{E}[X\wedge x] &= -\theta\ln\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right), \quad \alpha=1, \\
\mathrm{TVaR}_p(X) &= \mathrm{VaR}_p(X)+\frac{\theta(1-p)^{-1/\alpha}}{\alpha-1}, \quad \alpha>1, \\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}\beta[k+1,\alpha-k;x/(x+\theta)] \\
&\quad +x^k\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha, \quad k>-1,
\end{aligned}
$$

A.3.2.1 Gamma—α, θ (When $\alpha = n/2$ and $\theta = 2$, it is a chi-square distribution with n degrees of freedom.)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x/\theta)^\alpha e^{-x/\theta}}{x\Gamma(\alpha)}, \\
F(x) &= \Gamma(\alpha; x/\theta), \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k>-\alpha, \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k(\alpha+k-1)\cdots\alpha \quad \text{if } k \text{ is a positive integer}, \\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+k;x/\theta)+x^k[1-\Gamma(\alpha;x/\theta)], \quad k>-\alpha, \\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\theta^k\Gamma(\alpha+k;x/\theta) \\
&\quad +x^k[1-\Gamma(\alpha;x/\theta)] \quad \text{if } k \text{ is a positive integer},
\end{aligned}
$$

A.3.2.3 Weibull—θ, τ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau(x/\theta)^\tau e^{-(x/\theta)^\tau}}{x}, \\
F(x) &= 1 - e^{-(x/\theta)^\tau}, \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta[-\ln(1-p)]^{1/\tau}, \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k \Gamma(1+k/\tau), \quad k > -\tau, \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(1+k/\tau)\Gamma[1+k/\tau; (x/\theta)^\tau] + x^k e^{-(x/\theta)^\tau}, \quad k > -\tau,
\end{aligned}
$$

A.3.3.1 Exponential—θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{-x/\theta}}{\theta}, \\
F(x) &= 1 - e^{-x/\theta}, \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p), \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k \Gamma(k+1), \quad k > -1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k k! \quad \text{if } k \text{ is a positive integer}, \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= \theta(1 - e^{-x/\theta}), \\
\mathrm{TVaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p) + \theta, \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(k+1)\Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k > -1, \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k k! \Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta} \quad \text{if } k > -1 \text{ is an integer},
\end{aligned}
$$

A.5.1.1 Lognormal—μ,σ (μ can be negative)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) = \phi(z)/(\sigma x), \quad z = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}, \\
F(x) &= \Phi(z), \\
\mathrm{E}[X^k] &= \exp\left(k\mu + \tfrac{1}{2}k^2\sigma^2\right), \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \exp\left(k\mu + \tfrac{1}{2}k^2\sigma^2\right) \Phi\left(\frac{\ln x - \mu - k\sigma^2}{\sigma}\right) + x^k[1 - F(x)],
\end{aligned}
$$